## 培优课09 平面向量的综合应用

### 培优点一 平面向量中与模有关的最值（范围）问题

#### 审题指导

典例1 [2024·山东模拟]若平面向量，，满足（审题①考虑建系结合数量积得到的表达式），则的最小值（审题②考虑用基本不等式求最小值）为2.

**解题观摩**

[解析]在平面直角坐标系内，令，设,，由，得，由，得，由，得，即，

由于，…………审题①

，…………审题② 当且仅当或时取等号，所以的最小值为2.

#### 通性通法

设,则,向量的模可以利用坐标计算或借助“形”,向量的模指的是有向线段的长度,可以结合平面几何知识求解.注意:若直接求模不易,则可以将向量先用基底表示再求.

#### 培优训练

##### 将三个向量改成两个向量条件变式

1. 已知向量,满足,，若的最大值为1，则的取值范围为.

[解析]设向量,的夹角为 ，则.

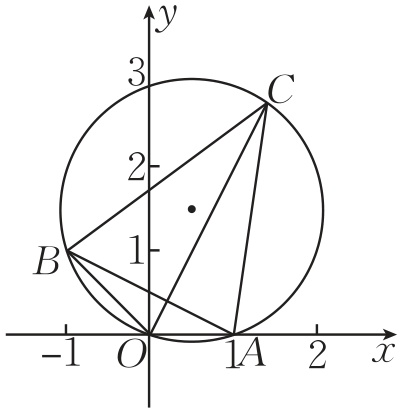
因为,,所以，

所以,因为，所以的取值范围是.

##### 将坐标法变成几何意义法综合变式

2. 已知向量，，满足，，，向量与向量的夹角为，则的最大值为.

[解析]依题意可知，因为，所以，如图所示，在平面直角坐标系中，不妨设，，，则，



由与的夹角为可知，所以,,,四点共圆，即点在的外接圆上.

因为，所以，由正弦定理得的外接圆直径为，所以的最大值为.

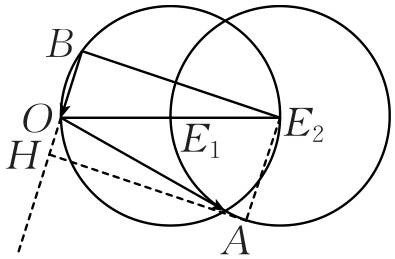
### 培优点二 平面向量中与数量积有关的最值（范围）问题

#### 审题指导

典例2 已知为单位向量，（审题①构造圆,作出向量的投影审题②利用数量积的函数表达式求取值范围），则的取值范围为.

**解题观摩**

[解析]设,,,，



，…………审题①

，…………审题①

如图所示，，…………审题①

当时，取得最小值，此时,

.…………审题②

易知当与同向时，取得最大值,最大值为6.故的取值范围为.

#### 通性通法

平面向量是在二维平面内既有大小又有方向的量，在解决平面向量的范围与最值问题时，常用代数法与几何法两种解法.

1.代数法的基本思路是利用函数的思想，将目标表达式转化为单变量函数，也有一些问题需要通过不等式的技巧来解决.

2.几何法的基本思路是将条件转化为几何元素，构图后通过平面几何的知识解决，当然很多时候利用数形结合来解题也是高效的解题手段.常用方法：（1）定义法;（2）坐标法；（3）基底法；（4）几何意义法.

#### 培优训练

##### 单个动点的范围问题条件变式

1. 已知菱形的边长为1， ，是边上的动点，则的最大值为.

[解析]设，，

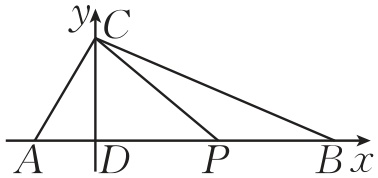
则,

的最大值为.

##### 定义法变为坐标法综合变式

2. 在中，，，，为边上的动点，则的最小值为.

[解析]过点作，垂足为，以为坐标原点，以，所在的直线分别为轴，轴建立平面直角坐标系，如图，



在中，，，

，，.

由题意，设，，则，，，

当时，取得最小值，最小值为.

### 培优点三 平面向量中与夹角有关的最值（范围）问题

#### 审题指导

典例3 [2024·成都模拟]若平面向量，满足（审题①由模长得到数量积的值），则（审题②得出夹角的表达式,考虑用基本不等式求解最值）是.

**解题观摩**

[解析]由两边同时平方得，因为，所以，…………审题①

所以，…………审题②

所以的最小值是.

#### 通性通法

设,,且,的夹角为 ,则.

求变量的取值范围、最值,往往要将目标函数用某个变量表示,转化为求函数的最值问题或采用基本不等式求解,期间要注意变量之间的关系.

#### 培优训练

##### 引入数量积的范围条件考查角度的范围综合变式

已知非零向量，满足，，若的取值范围为，则向量，的夹角 的取值范围为.

[解析]因为，所以，即，

又因为，所以，

所以，

又的取值范围为，所以，解得，又，所以，即，因为的最小值为，的最大值为，所以，又，所以，即向量，的夹角 的取值范围为.

### 培优点四 平面向量中的恒成立问题

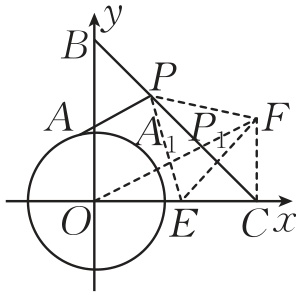
#### 审题指导

典例4 已知,，若存在实数 及单位向量，使得不等式（审题①问题等价于审题②利用向量共线定理转化转化求解）成立，则实数的最大值为( C ).

**解题观摩**

A. B. C. D.

[解析]以为坐标原点，,所在的直线分别为轴，轴建立平面直角坐标系，如图所示.设，可知点在单位圆上，是直线上任意一点，则，取的中点，作点关于直线对称的点，连接,，则,结合图形可知，



,审题…………②

,…………审题②

所以.连接，交圆于点，交于点，连接，

，…………审题① 则，解得，所以实数的最大值为.故选.

#### 通性通法

平面向量恒成立问题大多考查向量的几何属性（如模的最值问题）和向量的数量属性（如向量数量积的最值问题）.从形的角度，可以转化为运用点点距离、点线距离、点面距离等有关最值来求解；从数的角度，可以利用函数与方程或不等式求解.

#### 培优训练

##### 改变不等式的条件和设问形式综合变式

1. 已知向量,的夹角为，且对任意实数 ,恒成立，则.

[解析]，

，

由，得，整理可得，

设，则，即，解得.故.

##### 增加三角恒等变换知识知识变式

2. 已知向量，满足，，且对任意实数，不等式恒成立，设与的夹角为 ，则.

[解析],

要使不等式恒成立，

只需，

即，而，

所以，即，

解得，，

则，

则，所以.